PART3 対数関数を含む方程式・不等式

要点 ① 対数関数を含む方程式

対数の定義を用いて，対数関数を含む方程式を解く。

例 方程式 $\log_2 x = 3$ を解く。

真数は　　であるから　x　　…… ①

このとき，対数の定義から　$x =$

これは①を満たすから　$x = 8$

また，a を 1 でない正の定数，すなわち $a > 0$，$a \neq 1$ とするとき，以下のことがいえる。

対数の相等

$p > 0$，$q > 0$ のとき

$$p = q \iff \log_a p = \log_a q$$

このことを利用して，対数関数を含む方程式を解く。

例 方程式 $\log_2 x = 3$ を解く。

真数は正であるから $x > 0$ …… ①

このとき，方程式を変形すると $\log_2 x =$ 　　　　すなわち $\log_2 x =$

よって　$x = 8$

これは①を満たすから　$x = 8$

このように，対数関数を含む方程式は，底をそろえ，$\log_a p = \log_a q$ の形を導くことで解くことができる。

要点 ② 対数関数を含む不等式

対数関数の大小に関する性質

$a > 1$ のとき	$0 < p < q$	$\iff$	$\log_a p < \log_a q$
$0 < a < 1$ のとき	$0 < p < q$	$\iff$	$\log_a p > \log_a q$

を利用して，対数関数を含む不等式を解く。

例 不等式 $\log_{\frac{1}{2}}x>2$ を解く。

真数は　　であるから x　　　…… ①

このとき，不等式を変形すると $\log_{\frac{1}{2}}x>$　　　　　　すなわち　$\log_{\frac{1}{2}}x>$

底 $\dfrac{1}{2}$ は　　　　　　　　　　　　　　x　$\dfrac{1}{4}$　…… ②

①，②より

3 (1) 次の方程式を解け。

(i) $\log_3 x = 4$　　(ii) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=5$

(2) 次の不等式を解け。

(i) $\log_4 x \leqq 3$　　(ii) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2)<2$

Point Pickup

対数関数を含む方程式

対数の定義　$\log_a x = b \iff x = a^b$ を用いる。

または，「底」をそろえて，対数の性質

$a>0$，$a \neq 1$ のとき　$p=q \iff \log_a p = \log_a q$　（p，q は正）

を利用する。真数が正であることに注意。

対数関数を含む不等式

「底」をそろえて，対数関数の大小に関する性質

$a>1$ のとき　$0<p<q \iff \log_a p<\log_a q$

$0<a<1$ のとき　$0<p<q \iff \log_a p>\log_a q$

を利用する。真数が正であることに注意。

第 15 講　PART3 確認問題

次の方程式を解け。

1 $\log_4 x = 3$

$x =$ アイ

2 $\log_{\frac{1}{3}}(x-6) = -2$

$x =$ ウエ

次の不等式を解け。

3 $\log_5 x > 2$

オ

① $0 < x < 10$　② $x > 10$

③ $0 < x < 25$　④ $x > 25$

4 $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) \geqq 3$

カ

① $-2 < x \leqq -\frac{1}{8}$　② $x \geqq -\frac{1}{8}$

③ $-2 < x \leqq -\frac{15}{8}$　④ $x \geqq -\frac{15}{8}$

PART3 対数関数を含む方程式・不等式

3 (1) 次の方程式を解け。

(i) $\log_3 x = 4$　　(ii) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 5$

(2) 次の不等式を解け。

(i) $\log_4 x \leqq 3$　　(ii) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) < 2$

[解答]

(1)(i) 真数は正であるから　$x > 0$　……①

このとき，対数の定義から　$x = 3^4 = 81$

これは①を満たすから　$x = 81$

(ii) 真数は正であるから $x-1>0$　よって　$x>1$　……①

このとき，対数の定義から　$x-1 = \left(\frac{1}{2}\right)^5$　　$x = \frac{1}{32}+1 = \frac{33}{32}$

これは①を満たすから　$x = \frac{33}{32}$

(2)(i) 真数は正であるから　$x > 0$ …… ①

このとき，不等式を変形すると　$\log_4 x \leqq \log_4 4^3$

すなわち　$\log_4 x \leqq \log_4 64$

底 4 は 1 より大きいから　$x \leqq 64$ …… ②

①，②より　$0 < x \leqq 64$

(ii) 真数は正であるから　$x-2>0$　よって　$x>2$ …… ①

このとき，不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{3}}(x-2) < \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2$

すなわち　$\log_{\frac{1}{3}}(x-2) < \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}$

底 $\frac{1}{3}$ は 0 より大きく 1 より小さいから　$x-2 > \frac{1}{9}$　　よって　$x > \frac{19}{9}$ …… ②

①，②より　$x > \frac{19}{9}$

第15講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] アイ：64

[解説]

真数は正であるから　$x>0$　……①　[A]

このとき，対数の定義から

$$x=4^3=64$$ [B]

これは①を満たすから　$\boldsymbol{x=64}$

[A]　真数が正であることに注意。

[B]　$\log_a x=b \iff x=a^b$
$(a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$

2

[正解] ウエ：15

[解説]

真数は正であるから　$x-6>0$　[C]

よって　$x>6$　……①

このとき，対数の定義から

$$x-6=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=(3^{-1})^{-2}=9$$ [D]

$$x=9+6=15$$

これは①を満たすから　$\boldsymbol{x=15}$

[C]　真数が正であることに注意。

[D]　$\log_a x=b \iff x=a^b$
$(a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$

3 [正解] オ：④

[解説]

真数は正であるから　$x>0$　……①　[E]

このとき，与えられた不等式を変形すると

$$\log_5 x > \log_5 5^2$$

すなわち　$\log_5 x > \log_5 25$

底 5 は 1 より大きいから　[F]

$$x>25 \quad \cdots\cdots②$$

①，②より　$\boldsymbol{x>25}$

[E]　真数が正であることに注意。

[F]
・$a>1$ のとき
　$0<p<q \iff \log_a p<\log_a q$
・$0<a<1$ のとき
　$0<p<q \iff \log_a p>\log_a q$

4 [正解] カ：③

[解説]

真数は正であるから　$x+2>0$　[G]

よって　$x>-2$　……①

このとき，与えられた不等式を変形すると

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+2) \geqq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

すなわち　$\log_{\frac{1}{2}}(x+2) \geqq \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{8}$

底 $\dfrac{1}{2}$ は 0 より大きく 1 より小さいから　[H]

$$x+2 \leqq \frac{1}{8}$$

よって　$x \leqq -\dfrac{15}{8}$　……②

①，②より　$\boldsymbol{-2<x\leqq -\dfrac{15}{8}}$

[G]　真数が正であることに注意。

[H]
・$a>1$ のとき
　$0<p<q \iff \log_a p<\log_a q$
・$0<a<1$ のとき
　$0<p<q \iff \log_a p>\log_a q$